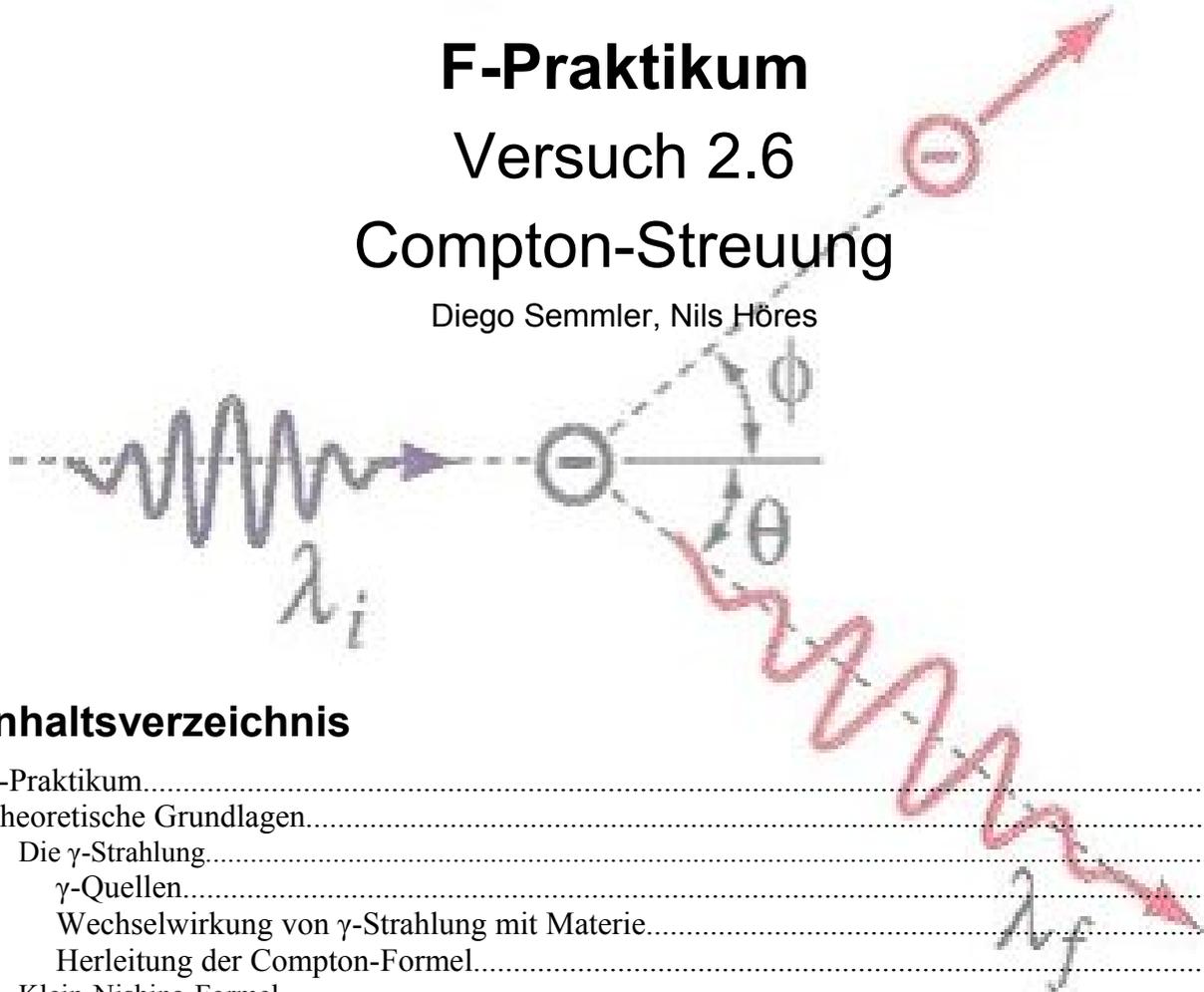


F-Praktikum

Versuch 2.6

Compton-Streuung

Diego Semmler, Nils Höres



Inhaltsverzeichnis

F-Praktikum.....	1
Theoretische Grundlagen.....	3
Die γ -Strahlung.....	3
γ -Quellen.....	3
Wechselwirkung von γ -Strahlung mit Materie.....	3
Herleitung der Compton-Formel.....	4
Klein-Nishina-Formel.....	5
Impulsspektren-Analyse.....	5
Photopeak.....	5
Escapepeak.....	5
Photo-Escape-Peak.....	5
Summenpeak.....	5
Rückstreupeak.....	6
Comptonspektrum.....	6
Versuchsaufbau.....	7
Szintillationszähler.....	7
Koinzidenzschaltung.....	7
NIM- und CAMAC Module.....	7
AND-Logik.....	7
Constant Fraction Discriminator (CFD).....	7
Time to digital Converter (TDC).....	8
Charge to Digital Converter (QDC).....	8
Gate Generator.....	8
Schaltbild.....	9
Auswertung.....	10
Energieeichung.....	10
Messung der Compton-Streuung bei 180°	11
Compton-Streuung als Funktion des Streuwinkels.....	12
Bestimmung der Elektronenmasse.....	13
Wirkungsquerschnitt.....	14
Messwerte	15

Theoretische Grundlagen

Die γ -Strahlung

γ -Strahlung sind elektromagnetische Wellen, zu denen auch das sichtbare Licht zählt, mit einer Energie ab ca. 200 keV.

γ -Quellen

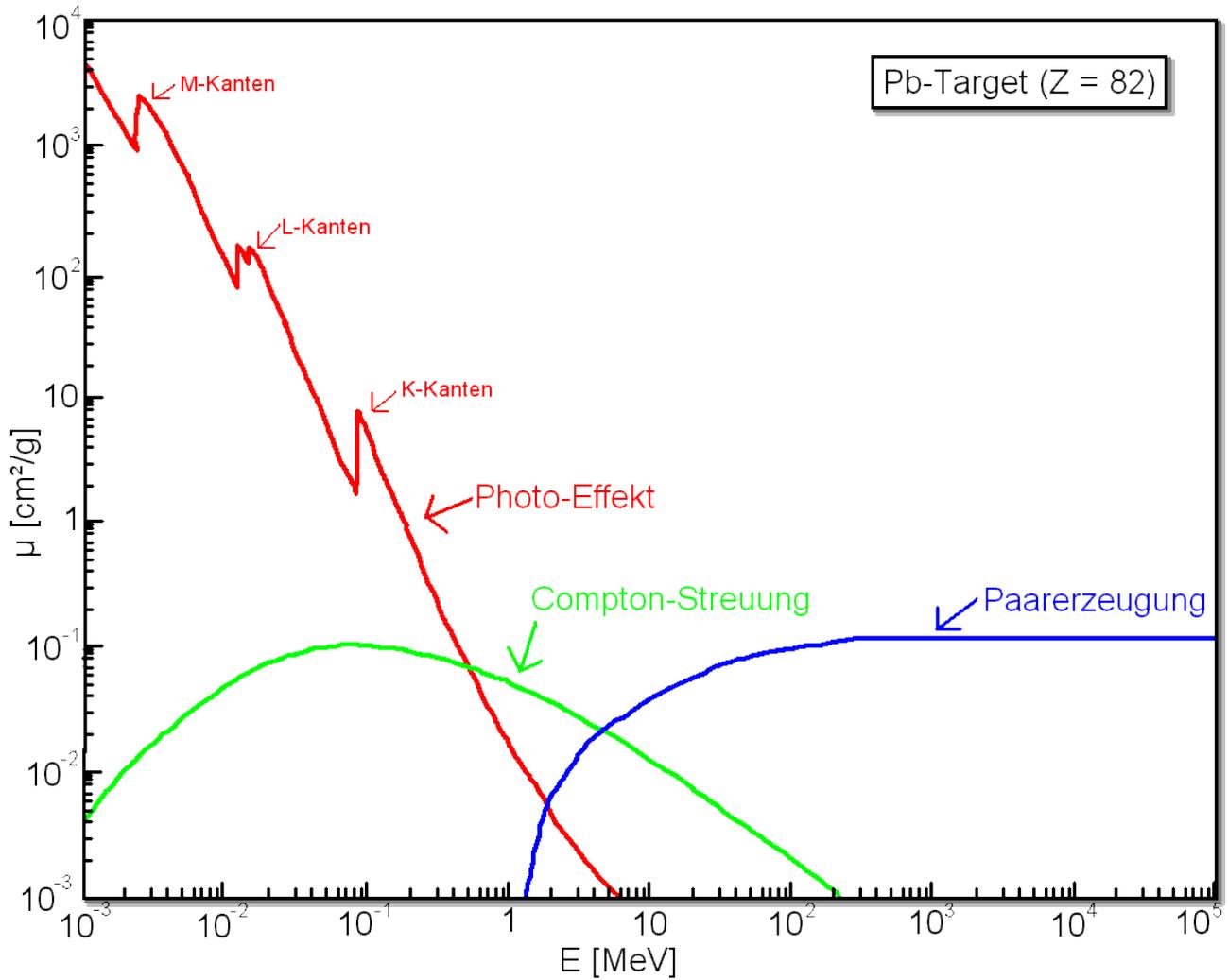
Die wichtigsten γ -Quellen im Alltag sind radioaktive Isotope und kosmische Strahlung. Für unseren Versuch sind jedoch nur folgende Isotope relevant:

- ^{137}Cs Energie: 661,6 keV
- ^{22}Na Energie: 1,2746 MeV
- Paarvernichtung: Energie: 510,9989 keV

Wechselwirkung von γ -Strahlung mit Materie

γ -Strahlung kann auf drei verschiedene Arten mit Materie wechselwirken:

- **Photo-Effekt:**
Bei diesem Ereignis schlägt das Photon ein Elektron aus der Elektronenhülle des Atoms. Dabei wird die gesamte Energie des Photons übernommen und das Photon eliminiert. Aus der Energieerhaltung folgt dass die Energie des Photons gleich der Bewegungsenergie des Elektrons, des rückgestoßenen Atomkerns und der Bindungsenergie sein muss.
Dieser Effekt tritt bevorzugt bei niedrigen Energien auf, insbesondere dann, wenn die Energie des Photons leicht größer ist, als die Energie eines gebundenen Elektrons.
- **Compton-Effekt:**
Hierbei wird das Photon in einem zwei-Teilchen-Stoß zurück gestreut. Dabei wird auf das Elektron Impuls und auch ein Teil der Energie übertragen.
Dieser Effekt ist im mittleren Energiebereich um 1 MeV dominierend.
- **Paarerzeugung:**
Bei hohen Energien kann ein Photon auch ein Elektron- Positronpaar erzeugen. Wegen der Impulserhaltung kann das nur im Coulomb-Feld eines Atomkerns (oder Elektrons) geschehen.
Bei hohen Energien ist dieser Effekt dominant.



Herleitung der Compton-Formel

Die experimentellen Ergebnisse der Compton-Streuung sind klassisch, d.h. mit den Maxwell-Gleichungen nicht erklärbar. Wir wählen daher einen Ansatz, der Elektron und Photon als Teilchen auffasst. Für diese gelten Energie- und Impulserhaltung. Daraus resultieren die Gleichungen:

$$E_\gamma = E_{\gamma'} + E_e \quad \vec{P}_\gamma = \vec{P}_{\gamma'} + \vec{P}_e$$

Wir setzen jetzt die entsprechenden Energien der Teilchen ein und formen die Gleichung um:

$$h \cdot \nu = h \cdot \nu' + \sqrt{P_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \Leftrightarrow (h \nu + m_e c^2 - h \nu')^2 = P_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 \Leftrightarrow$$

Jetzt lösen wir sie nach dem Impuls des Elektrons auf:

$$\left(\frac{h}{c}(\nu - \nu') + m_e c\right)^2 = P_e^2 + m_e^2 c^2 \Leftrightarrow$$

$$P_e^2 = \left(\frac{h}{c}(\nu - \nu') + m_e c\right)^2 - m_e^2 c^2 = \left(\frac{h}{c}(\nu - \nu')\right)^2 + 2h(\nu - \nu')m_e$$

Die Gleichung für den Impuls quadrieren wir und lösen sie ebenfalls nach dem Impuls des Elektrons auf: $P_e^2 = (\vec{P}_\gamma - \vec{P}_{\gamma'})^2 = P_\gamma^2 - 2P_\gamma P_{\gamma'} \cos(\vartheta) + P_{\gamma'}^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\nu' \cos(\vartheta) + \nu'^2)$

Wir setzen beide Ausdrücke gleich und formen um, sodass wir die Formel für die Wellenlängenänderung der Compton-Streuung erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{c}(\nu - \nu')\right)^2 + 2h(\nu - \nu')m_e &= \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\nu'\cos(\vartheta) + \nu'^2) \Leftrightarrow \\ \nu^2 - 2\nu\nu' + \nu'^2 + 2\frac{c^2}{h}(\nu - \nu')m_e &= \nu^2 - 2\nu\nu'\cos(\vartheta) + \nu'^2 \Leftrightarrow \\ -1 + \frac{c^2}{h} \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} m_e &= -\cos(\vartheta) \Leftrightarrow \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{c^2 m_e} (1 - \cos(\vartheta)) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} &= \frac{h}{c^2 m_e} (1 - \cos(\vartheta)) \Leftrightarrow \underline{\underline{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{cm_e} (1 - \cos(\vartheta))}} \end{aligned}$$

Klein-Nishina-Formel

Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung wird mit der Klein-Nishina-Formel beschrieben. Diese lautet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (P(\theta) - P(\theta)^2 \sin^2(\theta) + P(\theta)^3) \quad \text{mit} \quad P(\theta) = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos(\theta))}$$

Wobei $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}$ der klassische Elektronenradius ist und die übrigen Konstanten ihre übliche Bedeutung haben.

Impulsspektren-Analyse

Photopeak

Durch den Photoeffekt wird aus der Schale eines Atoms ein Elektron entfernt. Durch das anschließende Auffüllen dieser Schale wird ein Röntgenquant der Energie E_B freigesetzt, was der Energie des entfernten Elektrons entspricht. Das entfernte und nun freie Elektron hat die kinetische Energie $E_\gamma - E_B$. Durch das Röntgenquant können auch sog. Auger-Elektronen erzeugt werden, welche wiederum im Detektor nachgewiesen werden können. Durch sie entsteht ein scharfer Peak bei $E_P = E_\gamma$.

Escapepeak

Wenn die Energie der einfallenden γ -Strahlung die Grenze von 1024 keV überschreitet kann ein Elektron-Positron Paar erzeugt werden. Es wird damit eine Energie: $E_P = E_\gamma - 1024 \text{ keV}$ im Detektor deponiert und zwei 511 keV Annihilations-Quanten erzeugt, welche wieder auf unterschiedliche Weise wechselwirken können.

Photo-Escape-Peak

Selten kann ein Röntgenquant aus dem Detektor fliegen ohne eine Wechselwirkung hervorzurufen. Geschieht dies dennoch entsteht ein kleiner Peak bei $E_{PE} = E_\gamma - E_B$.

Summenpeak

Bei nahezu gleichzeitiger Wechselwirkung zweier γ -Quanten mit dem Detektor werden die einzelnen Ereignisse als ein Ereignis detektiert, welches die Energie: $E_S = E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}$ hat.

Rückstreupeak

Die Streuung der γ -Quanten geschieht hier außerhalb des Detektors und werden anschließend im Detektor aufgefangen. Die Energie des Rückstreupeaks beträgt also bei einer Energie von $E_R = E_\gamma - E_{C,max}$.

Comptonspektrum

Kann das gestreute γ -Quant beim Compton-Effekt aus dem Detektor entweichen, wird durch das Compton-Elektron die Energie:

$$E_C(E_\gamma, \theta) = E_\gamma - \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

mit $0 < E_C < E_{C,max}$ im Detektor deponiert. Die als Comptonkante bezeichnete Maximalenergie ist:

$$E_{C,max} = 2 \frac{E_\gamma^2}{m_e c^2 + 2 E_\gamma}$$

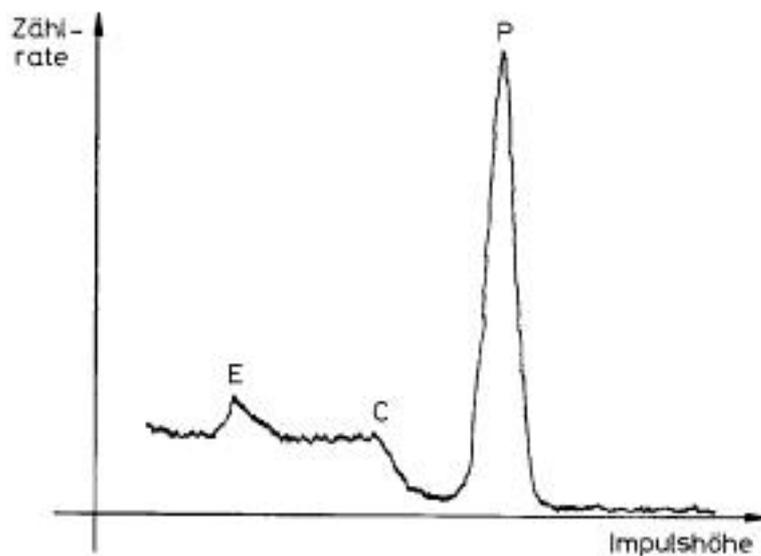


Abbildung 1: E: Escapepeak, C: Comptonkante, P: Photopeak, im Impulshöhenspektrum monoenergetischer γ -Strahlung.

Versuchsaufbau

Szintillationszähler

Der Szintillationsdetektor besteht aus einem Kristall. Trifft ein γ -Quant in den Detektor ein, werden eine Reihe Elektron-/Lochpaare erzeugt, die nach kurzer Zeit wieder zerfallen und ein Photon aussenden. Diese gelangen (im Idealfall) anschließend in einen Photomultiplier, der aus den Photonen ein elektrisches Signal generiert, das von einer Elektronik ausgewertet werden kann. Man dotiert diesen Kristall, damit die Elektronen über ein Zwischenniveau zurückfallen, da man sonst ein Photon hätte, das genau die Energie der Bandlücke hätte und deshalb sofort wieder im Kristall absorbiert würde.

Der Photomultiplier besteht aus einer Reihe von Photokathoden. Trifft ein Photon auf die erste Photokathode, löst es Elektronen aus, die mit einer Spannung in Richtung zweite Photokathode beschleunigt werden und dort weitere Elektronen auslösen, die ihrerseits zur dritten Photokathode beschleunigt werden u.s.w.. Am Ende entsteht ein Signal, das stark genug ist, um von der weiteren Elektronik verarbeitet zu werden.

Die Energieauflösung der Detektoren ist begrenzt, da die beiden oben beschriebenen Prozesse statistischer Natur sind.

Koinzidenzschaltung

Ziel der Verschaltung der im folgenden genannten Komponenten ist u.a. die Erstellung einer Koinzidenzschaltung. Beim Praktikums-Versuch vor Ort war es nicht unsere Aufgabe die Koinzidenzschaltung selbst zu bauen sondern „lediglich“ die bereits vorhandene Schaltung zu untersuchen und ein Schaltbild anzufertigen (zu finden im Anhang des Kapitels), da das Schaltbild das in der Anleitung abgedruckt ist nicht mehr aktuell ist. Trotz anfänglicher Zweifel über die Funktionstüchtigkeit haben wir die Anlage in Betrieb genommen und mussten dann feststellen das unsere Zweifel begründet waren denn der Koinzidenz-Teil der Schaltung funktionierte nicht, was an einem „versehentlich“ verlegten Kabels lag.

NIM- und CAMAC Module

Die einzelnen NIM- und CAMAC Module werden schon in der Praktikums-Anleitung weitestgehend behandelt. Hier sollen nur die wichtigsten Module zur Herstellung der Koinzidenz-Messung erwähnt und erläutert werden.

AND-Logik

Die AND-Logik funktioniert analog zu einem TTL AND-Baustein. Mehrere Eingangssignale werden mit einem logischen „Und“ verknüpft und das Resultat dieser Verknüpfung wird an mehreren Ausgängen als Signal zur Verfügung gestellt.

Beim konkreten Modul gibt es vier verschiedene Glieder die man auch zwischen der logischen Verknüpfung durch „Und“ und „Oder“ umschalten kann.

Constant Fraction Discriminator (CFD)

Der CFD dient der Umwandlung eines analog vorliegenden Signals in ein digitales Signal. Das analoge Signal liegt hierbei in Form einer Maxwell-Verteilung vor und soll in ein digitales Rechtecksignal überführt werden. Diese Überführung wird durch die Elektronik in dergestalt realisiert als das beim Unterschreiten einer vorgegebenen Schwelle ein Signal ausgelöst wird bzw. die Auslösung unterdrückt wird. Die Umsetzung kann hierbei auf verschiedene Arten geschehen,

wobei ein CFD eine verhältnismäßig komplexe Methode darstellt. Der Vorteil dieser Methode zeigt sich jedoch indem kein sog. „Walk“ auftritt, welcher gewöhnlich bei einfachen „Leading-Edge“ Diskriminatoren auftreten kann. Diese Leading-Edge Diskriminatoren, die beim Überschreiten einer Signalamplitude ein Ausgangssignal erzeugen, liefern im Falle zweier zeitgleicher Eingangssignale zwei unterschiedliche zeitliche Ausgangssignale. Die verhindert man beim CFD indem das Ursprungssignal um eine konstante Zeit verzögert und einmal gedämpft und invertiert wird. Als Summe dieser beiden Signale sollte nun ein Nulldurchgang vorhanden sein, der die Schwelle des Diskriminators für das Ausgangssignal darstellt.

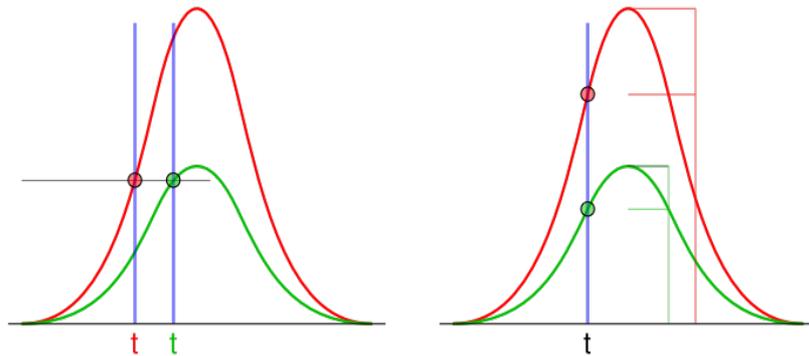


Abbildung 2: Walk-Error am Beispiel von threshold triggering und constant-fraction triggering. (Quelle wikipedia)

Time to digital Converter (TDC)

Das TDC-Module wird mittels eines Start- und Stopp-Signals gestartet und gestoppt, die Zeit zwischen diesen beiden Signalen wird proportional als Binärzahl am Ausgang des Moduls zur Verfügung gestellt. Konkret eingesetzt wird der TDC von uns um die zeitliche Differenz zwischen den Signalen des NaJ und des Plastik-Detektors zu messen. Dieser Wert kann dann von dem, am Camac-Modul angeschlossenen PC, abgerufen werden.

Die Messung kann hierbei jedoch von einem Ion unerwünscht beeinflusst werden, wenn dieses Ion innerhalb der Totzeit eintrifft, was bedeutet das es nicht detektiert werden kann. Dies bedeutet das dieses Konzept des TDC primär für Experimente mit niedriger Zählrate interessant ist, wobei der TDC aber ein gutes Signal-Rausch Verhältnis hat.

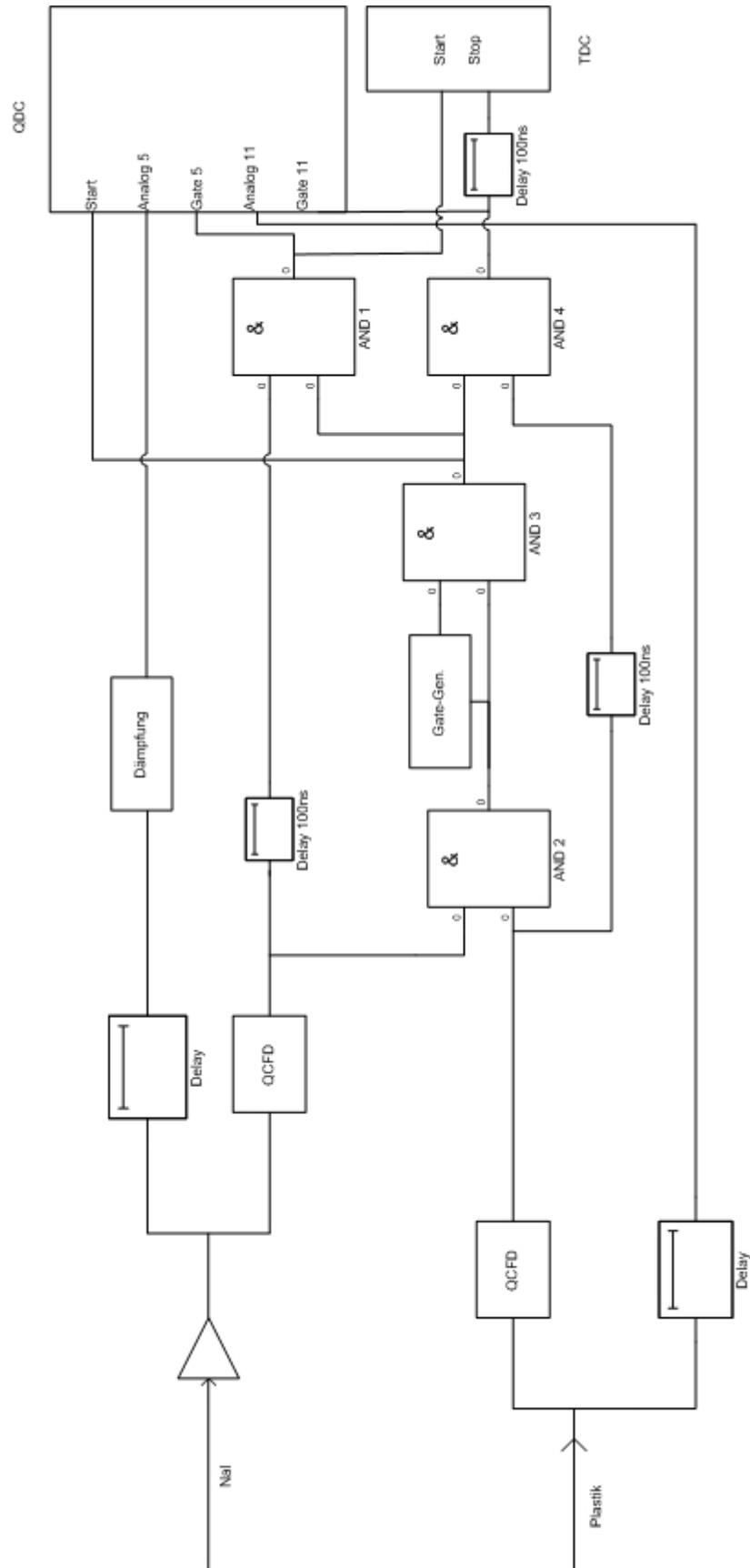
Charge to Digital Converter (QDC)

Der QDC misst die Ladung an max. acht Eingängen durch Integration der Eingangssignale nachdem das Startsignal gegeben wurde. Anschließend kann die Ladung als Binärzahl abgerufen werden.

Gate Generator

Der Gate Generator erzeugt für jeden Eingangspuls ein, mit Hilfe des PC einstellbares, Ausgangssignal fester Dauer.

Schaltbild



Auswertung

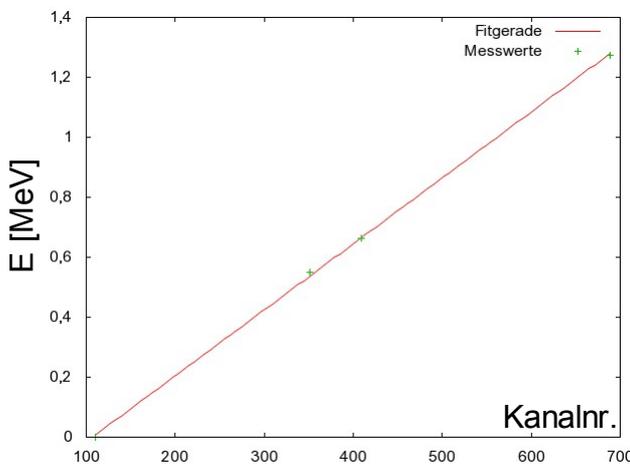
Energieeichung

Um den Kanälen eine Energie zuzuordnen wird als erstes eine Energieeichung durchgeführt. Hierfür werden für die verschiedenen γ -Quellen die Energiespektren mit dem NaJ-Detektor aufgenommen. Mit Hilfe der Photopeaks von Natrium und Cäsium und deren bekannten Energien und der Lage des Pedestals kann durch einen linearen Fit die Energieeichung durchgeführt werden. Das Pedestal ist das Signal des Charge-to-Digital Converters, das dieser ausgibt, wenn kein Eingangssignal vorhanden ist.

Um die Messungen vorzunehmen wird als erstes die Koinzidenzmessung ausgeschaltet um nur die Signale des NaJ-Detektors zu messen. Es wird daraufhin mit der Messung der Cäsium Probe begonnen um die Lage des ^{137}Cs -Photopeak zu ermitteln. Anschließend wird selbiges mit dem ^{22}Na -Photopeak durchgeführt. Schließlich wird noch die Kanalnummer des Pedestals ermittelt das ohne die Eingabe eines Präparats geschieht.

Die Literaturwerte sowie die Ergebnisse des Fittens der einzelnen Peaks sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

	Literaturwert [MeV]	Kanalnummer	Kanalfehler	Fit Energie [MeV]	Fit Fehler
Pedestal	0,000	110,2	0,2	7,10E-003	1,57E-002
Cäsium	0,662	408,7	0,6	6,64E-001	2,49E-002
Natrium (low)	0,551	351,3	1,2	5,37E-001	2,46E-002
Natrium (high)	1,275	688,8	8,5	1,28E+000	5,00E-002



Der Fit wurde mit der Geradengleichung:
 $y = bx + a$ mit Hilfe von GNUplot gefittet.

Die Werte und Fehler für a und b lauten wie folgt:

$a = -0,235292 \pm 0,01222$
 (Fehler: 5,194%)

$b = 0,00219959 \pm 2,773e-005$
 (Fehler: 1,261%)

Der Fehler wird mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ermittelt:

Abbildung 3: Fitgerade

$$\begin{aligned} \Delta E(Kanal, b, a) &= \left| \frac{\delta E}{\delta Kanal} \right| \Delta Kanal + \left| \frac{\delta E}{\delta b} \right| \cdot \Delta b + \left| \frac{\delta E}{\delta a} \right| \Delta a \\ &= \left| \frac{1}{0,0022} \right| \Delta x + \left| \frac{-1}{0,0022} \right| \cdot 0,01222 + \left| -\frac{(Kanal + 0,235)}{0,0022^2} \right| \cdot 2,773 \cdot 10^{-5} \\ &= \frac{\Delta Kanal}{0,0022} + \frac{0,012}{0,0022} + \frac{(Kanal + 0,235) \cdot 2,773 \cdot 10^{-5}}{0,0022^2} \end{aligned}$$

Messung der Compton-Streuung bei 180°

Es wird ein Winkel von 180° für die ^{137}Cs -Quelle eingestellt, für welchen die Photonen nur unter einem kleinen Wirkungsquerschnitt zurück gestreut werden. Die Compton-Wellenlänge soll für diese Energie ermittelt werden.

$$\text{Es gilt: } \Delta \frac{1}{E} = \frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_e c^2 (1 - \cos\theta)} \quad \text{und}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)$$

Dies wird für $\theta = 180^\circ$ zu:

$$\lambda_c = \frac{1}{2} \left(\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} \right)$$

Der Fehler ergibt sich zu:

$$\Delta \lambda_c = \frac{1}{2} \frac{hc}{E'^2} \Delta E'$$

Hierbei entspricht E der Energie, die das γ -Quant beim ^{137}Cs -Zerfall trägt, also : 0,662 MeV. Aus der Messung liest man als Kanal für das zurück gestreute Quant : $197,2 \pm 0,2$. Durch Umrechnung mit der oben ermittelten Fitt-Formel entspricht dies einer Energie von $(0,198 \pm 0,0181)$ MeV. Dieser Wert kann nun in obige Gleichung eingesetzt werden und man erhält als Wert für die Compton-Wellenlänge:

$$\lambda_c = (2,19 \pm 0,29) \text{ pm}$$

was den Literaturwert von 2,43 pm einschließt.

Compton-Streuung als Funktion des Streuwinkels

Wie in Abb. 4, in der sowohl der theoretische als auch der experimentelle Verlauf der Energie in Abh. des Streuwinkels zu sehen ist, festgestellt werden kann stimmen der experimentelle und der theoretische Wert größtenteils innerhalb der Toleranz überein. Die Messwerte sind in Tab. 1 zu sehen.

Theta [°]	1-cos(Theta)	Kanal	Kanalfehler	Energie	Energiefehler
40	0,234	309,5	0,7	445 keV	22 keV
60	0,500	276,6	0,6	373 keV	21 keV
80	0,826	245,1	0,5	304 keV	20 keV
100	1,174	222,3	0,5	254 keV	19 keV
120	1,500	210,1	0,4	227 keV	19 keV
140	1,766	201,0	0,4	207 keV	19 keV
160	1,930	196,6	0,3	197 keV	18 keV
180	2,000	197,2	0,2	198 keV	18 keV

Tabelle 1: Energie in Abh. vom Streuwinkel

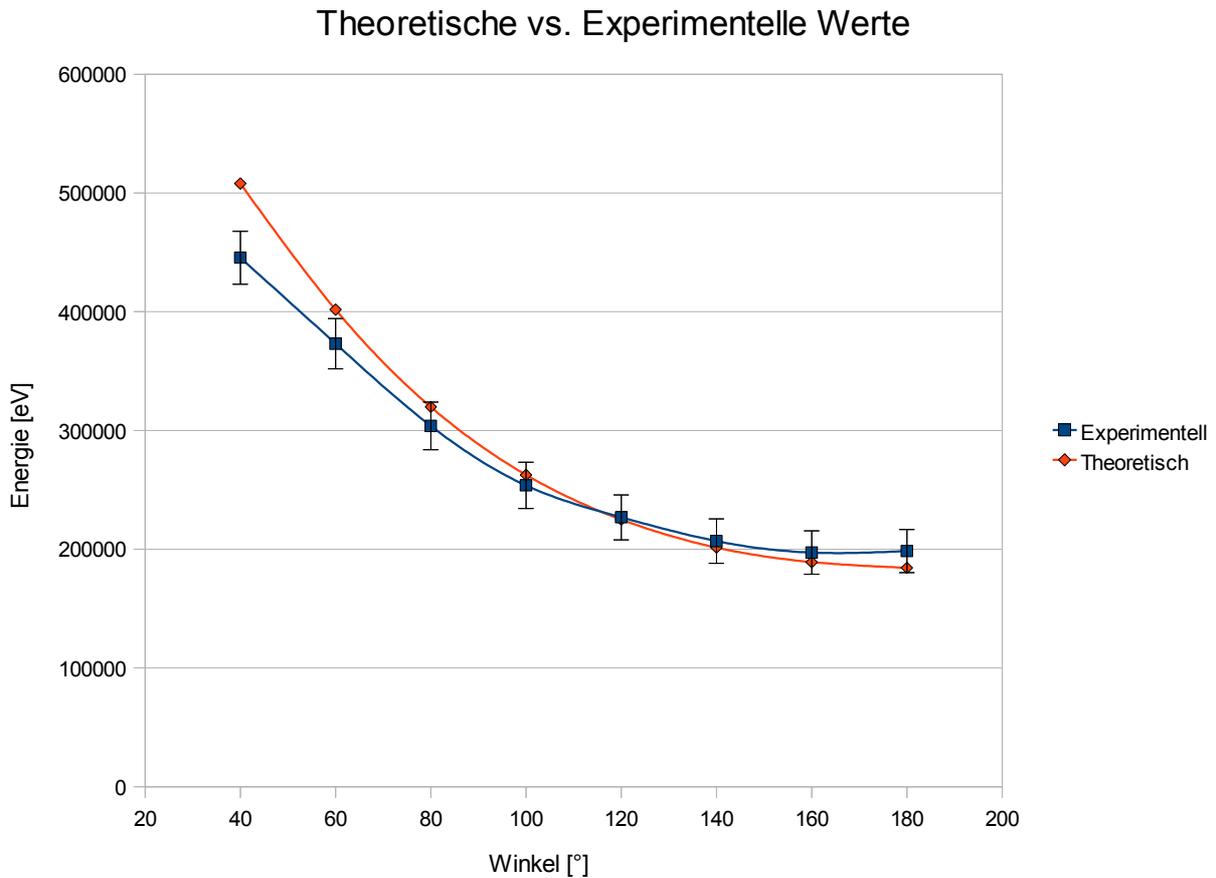
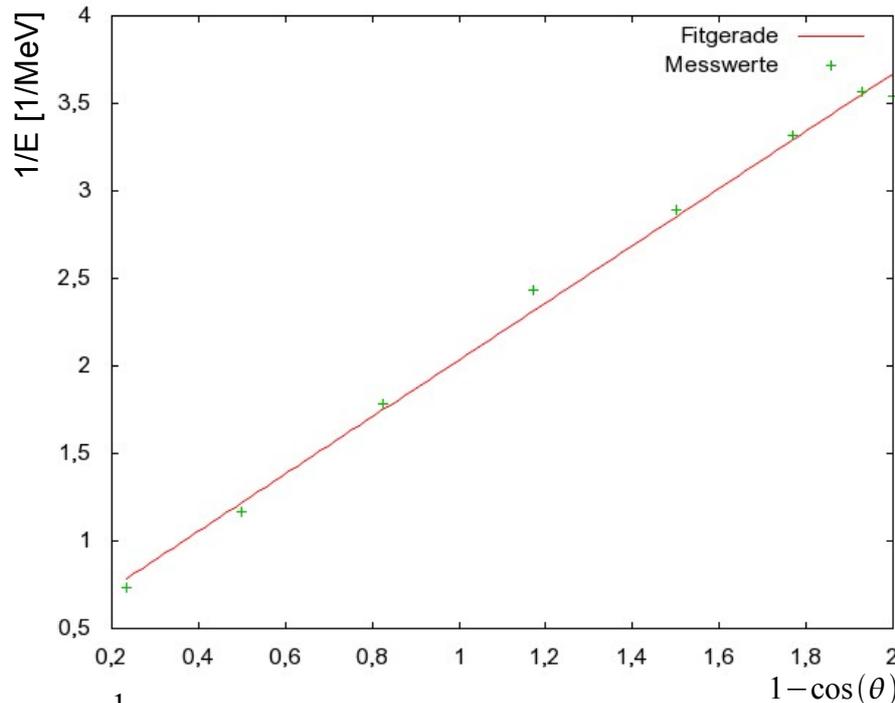


Abbildung 4: Theoretische- vs. experimentelle Werte der Winkelabhängigkeit

Bestimmung der Elektronenmasse

Wenn man die Funktion: $\Delta \frac{1}{E} = \frac{1}{E_{y'}} - \frac{1}{E_y}$ gegen $1 - \cos(\theta)$ aufträgt, so erhält man eine Gerade aus deren Steigung man, nach linearem Fitten, die Elektronenmasse bestimmen kann.

Gemäß des Fehlerfortpflanzungsgesetzes wird für $\Delta \frac{1}{E}$ der Fehler zu: $\Delta(\Delta \frac{1}{E}) = \frac{\Delta E'}{E'^2}$ bestimmt.



Die Steigung $S := \frac{1}{m_e c^2}$ ist hierbei: $1,63351 \pm 0,402026$ und man erhält durch Gleichsetzung:

$$S = \frac{1}{m_e c^2} = (1,63 \pm 0,40) \frac{1}{MeV}$$

woraus folgt:

$$m_e c^2 = (0,61 \pm 0,15) MeV$$

wobei sich der Fehler der Elektronenmasse aus:

$$\Delta(m_e c^2) = \frac{\Delta S}{S^2}$$

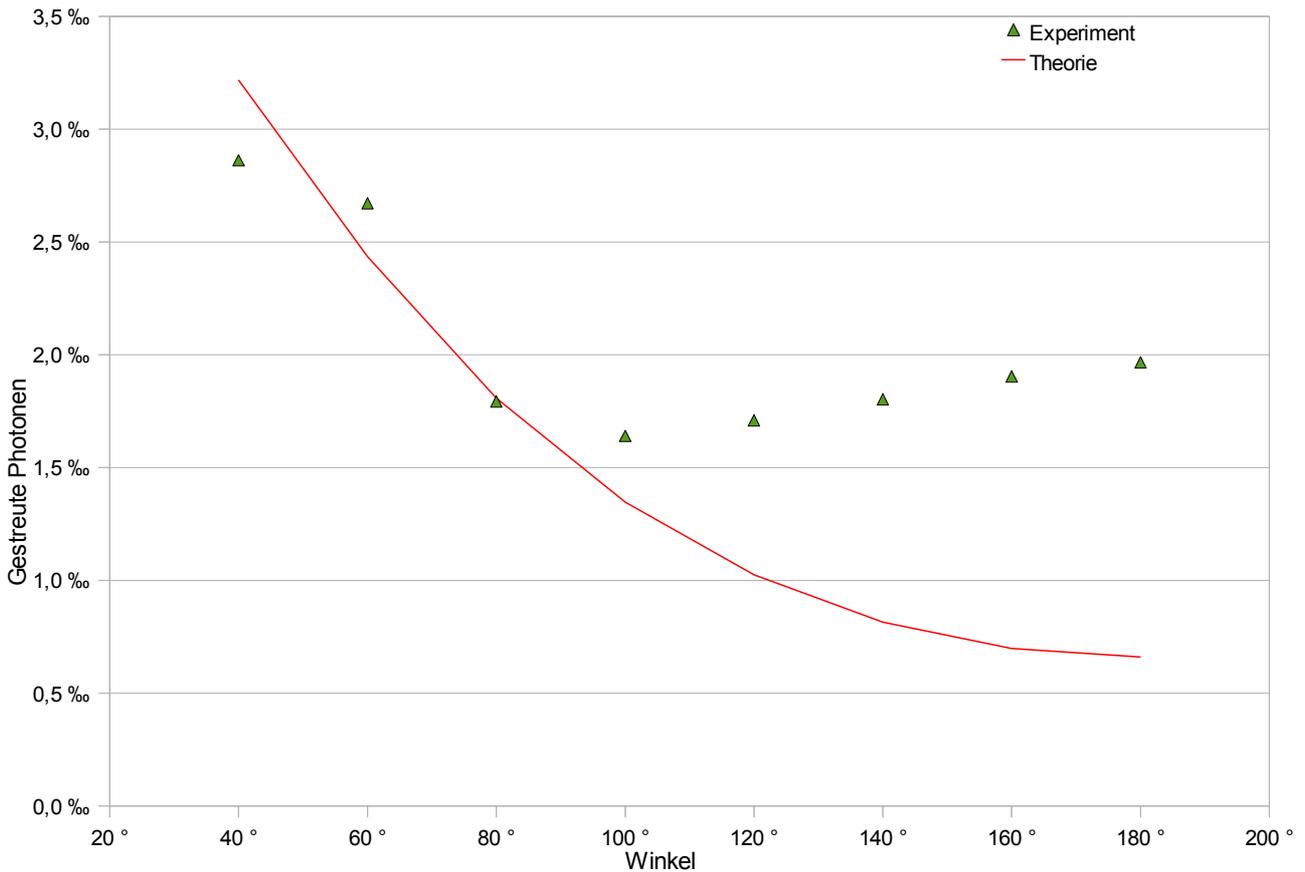
ergibt.

Der Literaturwert beträgt 0,511 MeV, was von unserer Messung erfasst wird.

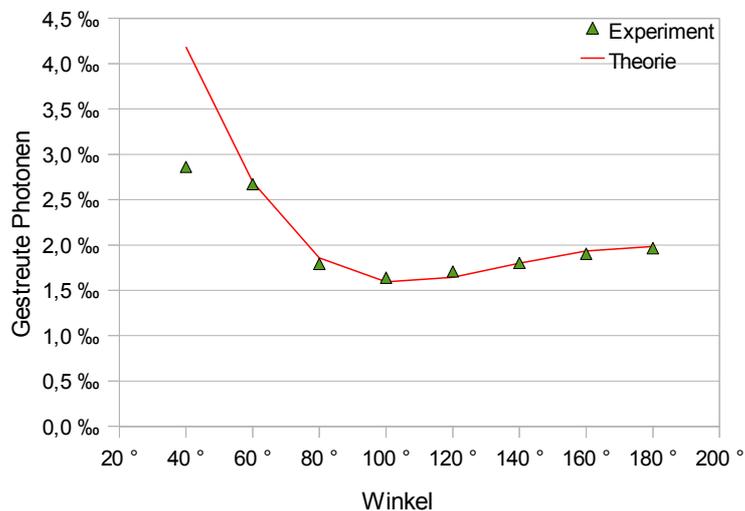
Wirkungsquerschnitt

Es soll die Anzahl der Ereignisse, unter Beachtung der Normierung, gegen Theta dargestellt werden. Eine Proportionalität des Ergebnisses zum Wirkungsquerschnitt soll vorhanden sein und somit eine Entsprechung der Klein-Nishina Formel.

In unserem Fall ist der Wirkungsquerschnitt das Verhältnis der gestreuten Photonen und der Zählrate. Die Anzahl der gestreuten Photonen lässt sich ermitteln indem die Werte „Constant“ und „Sigma“ aus den Gauß-Fits multipliziert werden.



Leider stimmen die gemessenen Daten aus für uns unerklärlichen Gründen nicht mit den Theoretischen Werten überein. Jedoch würden die Werte recht gut passen, wenn man nicht einen Strahler mit 662 keV, sondern mit ca. 270 keV annimmt:



Messwerte

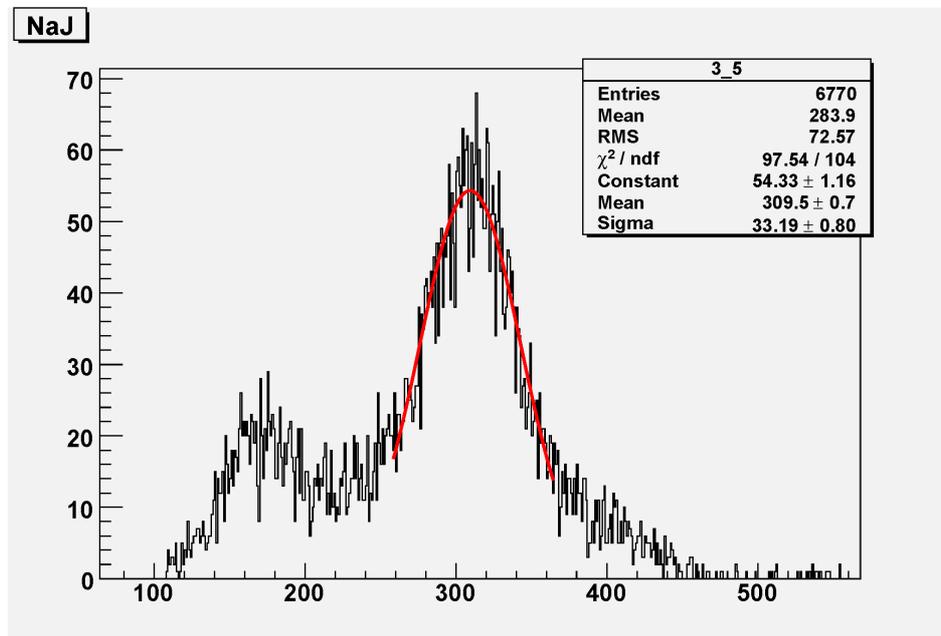


Abbildung 5: 40° Compton

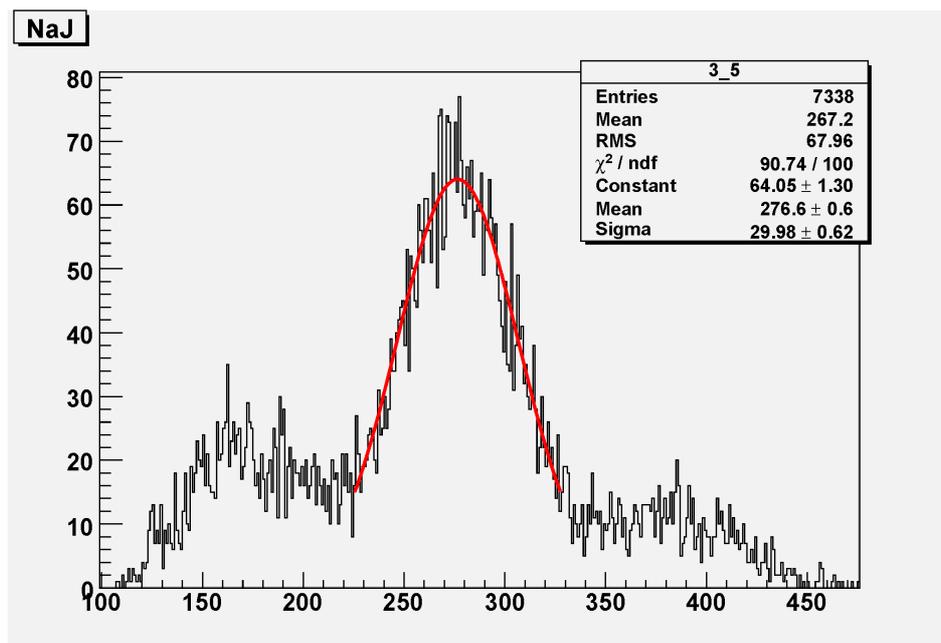


Abbildung 6: 60° Compton

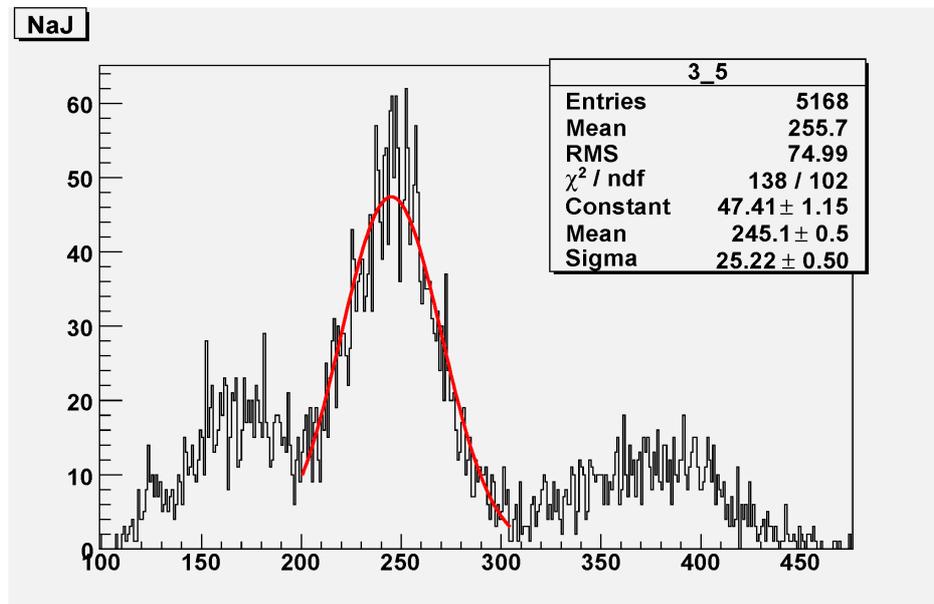


Abbildung 7: 80° Compton

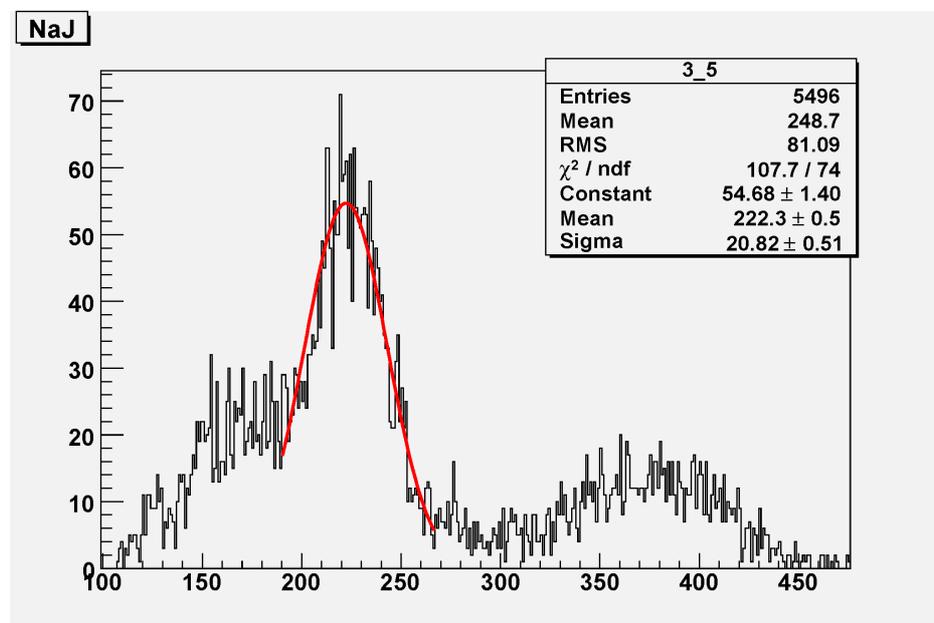


Abbildung 8: 100° Compton

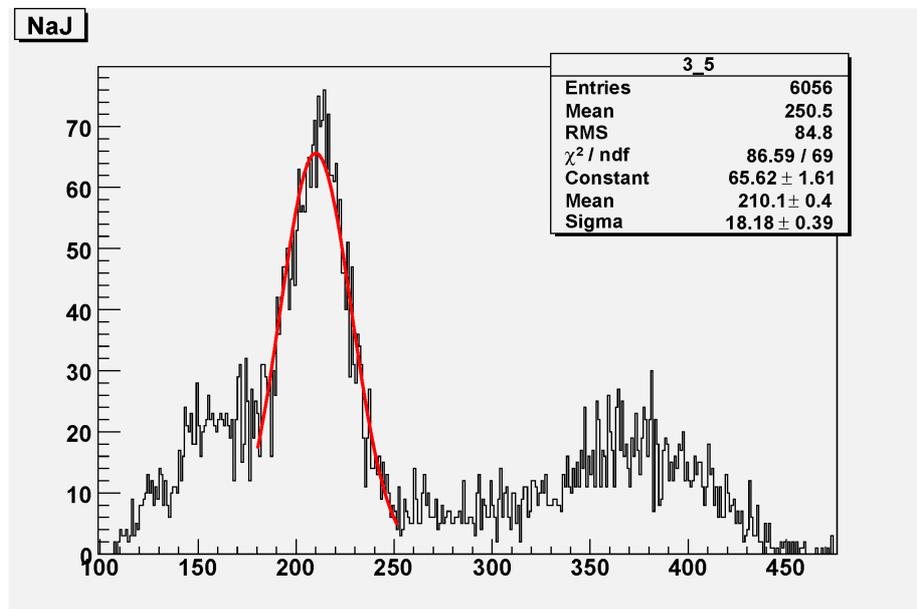


Abbildung 9: 120° Compton

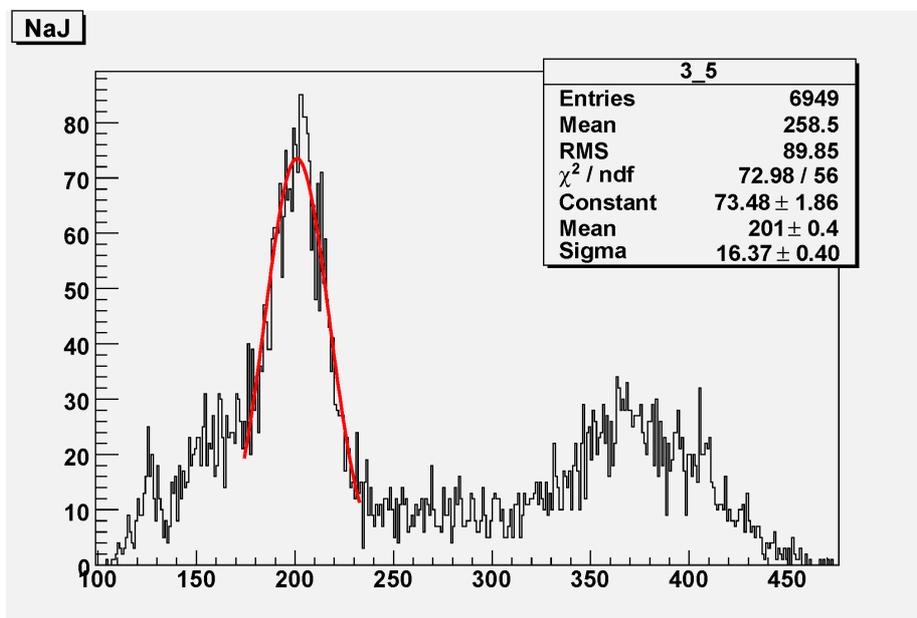


Abbildung 10: 140° Compton

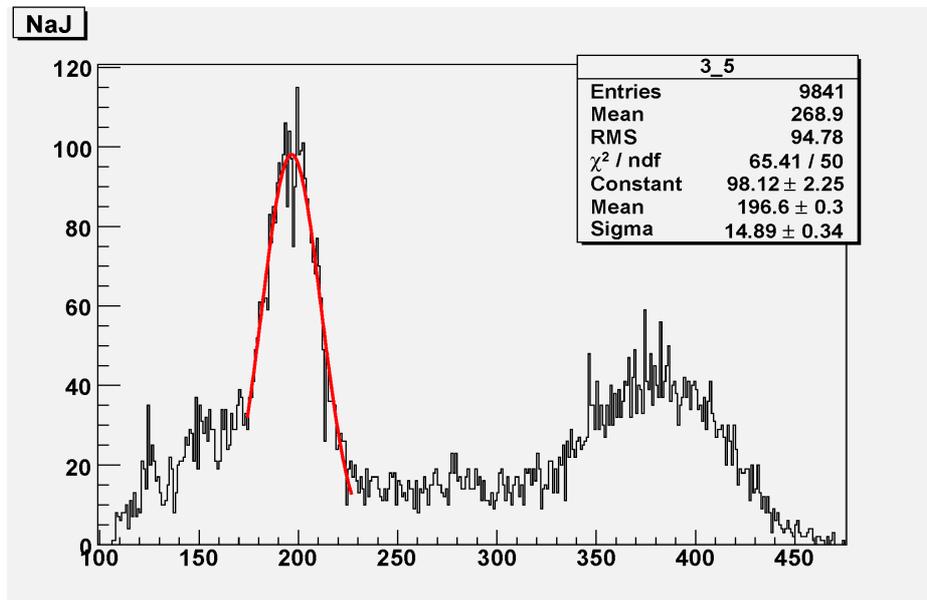


Abbildung 11: 160° Compton

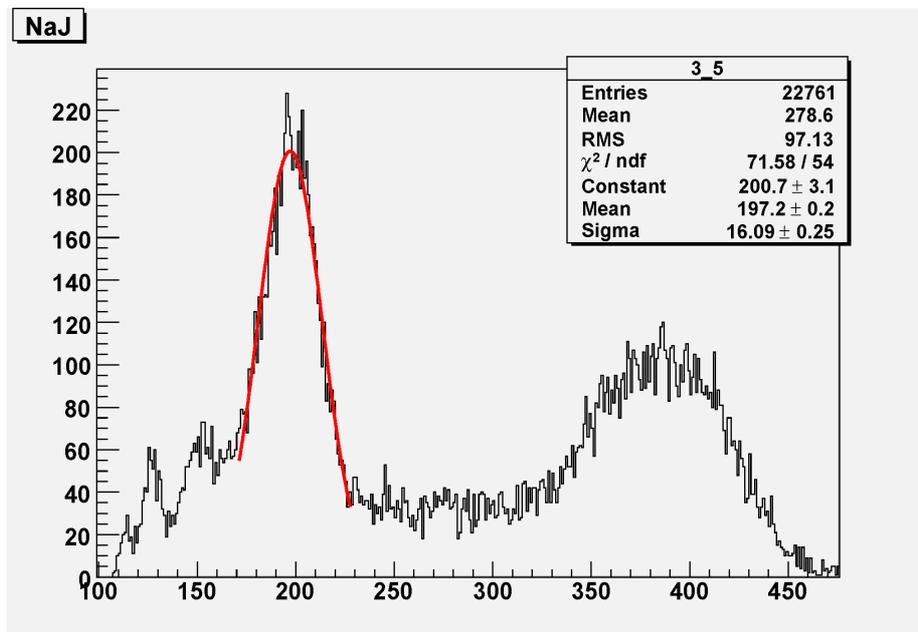


Abbildung 12: 180° Compton

Theta	1-cos(Theta)	Kanal	Kanalfehler	Energie [MeV]	Energiefehler
40	2,34E-001	309,500	7,00E-001	4,45E-001	2,23E-002
60	5,00E-001	276,600	6,00E-001	3,73E-001	2,12E-002
80	8,26E-001	245,100	5,00E-001	3,04E-001	2,01E-002
100	1,17E+000	222,300	5,00E-001	2,54E-001	1,95E-002
120	1,50E+000	210,100	4,00E-001	2,27E-001	1,89E-002
140	1,77E+000	201,000	4,00E-001	2,07E-001	1,87E-002
160	1,93E+000	196,600	3,00E-001	1,97E-001	1,83E-002
180	2,00E+000	197,200	2,00E-001	1,98E-001	1,81E-002

Winkel [°]	Zählrate	Const.	Sigma
40°	630169	54,33	33,19
60°	718865	64,05	29,98
80°	667015	47,41	25,22
100°	694283	54,68	20,82
120°	698050	65,62	18,18
140°	667446	73,48	16,37
160°	772277	98,12	14,98
180°	1642579	200,7	16,09